Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietăţile:

a) câtul împărţirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărţirii lui $n+36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Soluţie Avem $n = 9 \cdot 111 \cdot a + r$, unde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $r < 9$ este număr natural,

.... **1 punct**

deci $n \leq 9 \cdot 999 + 8 = 8999$ şi apoi $\frac{n+36}{4} < 2258$,

.... **1 punct**

ceea ce arată că $\left[\frac{n+36}{4}\right] = 2009$ sau 2090.

.... **2 puncte**

Dacă $\left[\frac{n+36}{4}\right] = 2009$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2009 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8000, 8001, 8002, 8003\}$. Dintre acestea, doar 8000 convine, deoarece câtul împărţirii numerelor 8001, 8002, 8003 la 9 este 889.

.... **2 puncte**

Dacă $\left[\frac{n+36}{4}\right] = 2090$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2090 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci $n \in \{8324, 8325, 8326, 8327\}$. Niciun un număr nu verifică prima cerinţă, deci $n = 8000$.

.... **1 punct**

Problema 2. De o parte şi de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S şi P astfel încât $SA = SB = SC$ şi $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Ştiind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie. Notăm cu O, respectiv H proiecţiile punctelor S şi P pe planul (ABC). Fie G punctul de intersecţie al dreptei SP cu planul triunghiului.

Din congruenţa triunghiurilor SOA, SOB, SOC rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

.... **1 punct**

Deoarece $PA \perp (PBC)$ avem $PA \perp BC$; în plus $PH \perp BC$, rezultă $BC \perp (PAH)$, de unde $AH \perp BC$. Analog $BH \perp AC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC.

.... **2 puncte**

Dacă $O = H$, atunci triunghiul ABC este echilateral, punctele G, H, O coincid şi cerinţa este demonstrată.

.... **1 punct**

Dacă punctele O şi H sunt distincte, atunci G, H, O sunt coliniare, deoarece $SO \parallel PH$ şi $G \in SP$. Din condiţia asupra volumelor rezultă $2SO = PH$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice GOS şi GHP obţinem

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

.... **2 puncte**

Fie M mijlocul segmentului BC şi Γ centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci triunghiurile $AH\Gamma$ şi $OM\Gamma$ sunt asemenea, de unde $\frac{O\Gamma}{\Gamma H} = \frac{1}{2}$, adică $G = \Gamma$, ceea ce trebuia arătat.

.... **1 punct**

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ şi $y = |a - 2| + |b - 2| + |c - 2|$.

a) Să se arate că $x + y \geq 6$.

b) Ştiind că a, b, $c \in [-1, 3]$ şi că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Soluţie. a) Din inegalitatea modulului avem $|t| + |t-2| \geq |t-(t-2)| = 2$ oricare ar fi numărul real t.

.... **1 punct**

Atunci $|x| + |y| = (|a| + |a-2|) + (|b| + |b-2|) + (|c| + |c-2|) \geq 2+2+2 = 6$.

.... **1 punct**

b) Fie $f(t) = |t| + |t - 2|$. Observăm că pentru $t \in [0, 2]$ avem $f(t) = t + (2 - t) = 2$,

.... **1 punct**

pentru $t \in (2, 3]$ avem $f(t) = 2t - 2 \leq 4$, iar pentru $t \in [-1, 0)$ avem $f(t) = 2 - 2t \leq 4$.

.... **1 punct**

Vom arăta că dacă a, b, $c \in [-1, 3]$ şi $a + b + c = 3$, atunci unul dintre cele trei numere este în intervalul $[0, 2]$. Fie $a \leq b \leq c$. Este evident că nu putem avea $a, b, c \in [-1, 0)$ sau $a, b, c \in (2, 3]$.

. . . . **1 punct**

Dacă $a, b, c \notin [0, 2]$, rămân cazurile:

- $a, b \in [-1, 0)$ şi $c \in (2, 3]$
- $a \in [-1, 0)$ şi $b, c \in (2, 3]$.

În primul caz avem $a + b + c < 0 + 0 + 3 = 3$, fals, iar în al doilea caz avem $a + b + c > -1 + 2 + 2 = 3$, fals.

. . . . **1 punct**

În concluzie, $|x| + |y| = f(a) + f(b) + f(c) \leq 4 + 2 + 4 = 10$.

. . . . **1 punct**

Problema 4. Prin plane paralele la feţele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Soluţie. Fie A un vârf al cubului. Muchiile din A sunt împărţite de planele paralele la feţe în câte trei segmente. Într-adevăr, în caz contrar s-ar folosi 26 de plane paralele la o faţă sau 8 plane paralele la o faţă şi 2 plane la o altă faţă. Ambele cazuri produc 27 de paralelipipede cu o dimesiune egală cu cea a cubului iniţial, deci niciun cub, fals.

. . . . **1 punct**

Notăm cu x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 şi z_1, z_2, z_3 lungimile segmentelor generate pe muchiile din A. Observăm că

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3, \tag{1}$$

sumele reprezentând lungimea muchiei cubului.

. . . . **1 punct**

Dacă cele două cuburi au dimensiunile $a \neq b$, atunci $a = x_i = y_j = z_k$ şi $b = x_p = y_q = z_r$, cu $i \neq p$, $j \neq q$ şi $k \neq r$.

. . . . **2 puncte**

Fie u cel de-al treilea număr din mulţimea $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, p\}$, $v \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, q\}$ şi $t \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, r\}$. Relaţia (1) devine

$$a + b + x_u = a + b + y_v = a + b + z_t,$$

deci

$$x_u = y_v = z_t,$$

. . . . **2 puncte**

ceea ce arată că printre cele 27 de paralelipipede mai există un al treilea, fals.

. . . . **1 punct**